Ondas Mecánicas

Maria Teresa Malachevsky

1. ¿Qué es una onda?

Todos somos conscientes de que las ondas nos rodean: ondas de luz que salen de la lámpara de la habitación donde estamos, ondas de sonido de la radio que estamos escuchando, microondas que nos están calentando el café. Ahora, ¿qué son las ondas? O mejor dicho, ¿qué hace que todas estas cosas sean ondas?

Cuando una onda viaja se transmite energía e impulso. Esta característica es lo que define a un fenómeno ondulatorio: una onda permite que haya transporte de energía de un punto a otro sin que haya transporte de materia. Esto es muy distinto a lo que pasa al pegar una patada a una pelota. En este caso transportamos energía hacia otro punto con transporte de masa: la energía va con la pelota. Con las ondas estamos transportando energía e impulso sin que haya un transporte de masa.

Vamos a estudiar un tipo particular de ondas llamadas **ondas mecánicas**. Éstas se describen como una perturbación que viaja por un medio de un punto a otro del mismo, siendo el medio una sustancia o material que **lleva** a la onda. Las ondas sonoras son ondas mecánicas, el sonido viaja por el aire (el medio) que está en nuestra habitación. Cuando tocamos la guitarra, las vibraciones de las cuerdas (el medio) también son ondas mecánicas. Toda onda que necesite de un medio para poder propagarse va a ser una onda mecánica. Si consideramos que el medio está formado por un conjunto de partículas, cada una de ellas interactúa con sus vecinas y así la perturbación viaja. Cada partícula que compone el medio se desplaza temporariamente y vuelve a su posición original después que pasa la onda. El punto donde se introduce la perturbación, o sea el lugar donde ocurre el primer desplazamiento de partículas, es llamado **fuente** de la onda. La superficie que contiene a todas las partículas del medio que son alcanzadas por la perturbación en un mismo instante se llama **frente** de onda. Cuando esa superficie es un plano, la onda se denomina **onda plana**. En particular, vamos a estudiar **ondas periódicas**. En este caso cada partícula del medio efectúa un movimiento periódico alrededor de su posición de equilibrio.

Hay otros tipos de ondas que **NO** son mecánicas, como las electromagnéticas (luz, radio, rayos x, microondas). Éstas no necesitan un medio para propagarse y pueden hacerlo en el vacío, donde no hay partículas que se muevan.

2. ¿Cómo se describe una onda?

Para describir una onda tenemos que determinar su amplitud, longitud de onda, frecuencia y período.

La **amplitud** de una onda se mide desde la posición de reposo de una partícula del medio hasta la posición de desplazamiento máximo de la misma. Imaginemos una onda como una ola en el mar. La amplitud estaría dada por la altura de la cresta de la ola.

La **longitud de onda** representa cuánto mide en longitud un ciclo completo, en nuestro ejemplo la distancia entre dos crestas de olas consecutivas.

Frecuencia y período son dos cantidades diferentes a pesar de estar relacionadas. La **frecuencia** es cuantas veces las partículas del medio hacen un ciclo de vibración completo por unidad de tiempo cuando una onda pasa a través de el. El **período** es el tiempo que tarda una partícula del medio en hacer un ciclo de vibración completo (o sea, el tiempo que tarda la onda en recorrer una distancia igual a la longitud de onda). La frecuencia se refiere a cuan seguido pasa algo, mientras que el período se refiere al tiempo que tarda ese algo en pasar. Matemáticamente, el período τ es la inversa de la frecuencia ν y viceversa:

$$\tau = 1/\nu$$

También podemos determinar la **velocidad de onda**, esto es la distancia que viaja un cierto punto de la onda (por ejemplo la cresta de una ola) en un dado período de tiempo. OJO: no confundir con cuanto viaja una partícula del medio, éstas se quedan en su lugar después que pasa la onda. Mientras la frecuencia nos da el número de ciclos que ocurren por segundo, la velocidad de la onda se refiere a los metros recorridos por segundo. Así una onda puede tener una muy alta frecuencia y una velocidad muy baja y viceversa. La velocidad y la frecuencia están relacionadas a través de la longitud de onda:

$$v = \lambda\nu$$

El **número de onda** es proporcional a la inversa de la longitud de onda y nos indica la cantidad de picos (máximos de amplitud) que tenemos por unidad de longitud. Matemáticamente lo escribimos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

3. Clasificación de las ondas mecánicas según su movimiento

Una forma de clasificar las ondas mecánicas es según la dirección en la que se mueven las partículas del medio respecto a la dirección en que viaja la onda. Así tenemos 3 tipos de ondas: transversales, longitudinales y mixtas.

Una onda es **transversal** si las partículas del medio se desplazan en una dirección perpendicular a la dirección en que viaja la onda. Podemos generar una onda de este tipo en una soga, moviendo hacia arriba y hacia abajo uno de los extremos. Repitiendo este movimiento, sin cambiar la velocidad ni el desplazamiento de la mano, estamos generando una onda transversal periódica que viaja por la cuerda. Si tomamos una foto de la soga (o sea congelamos el movimiento), veremos la situación de la figura 1.

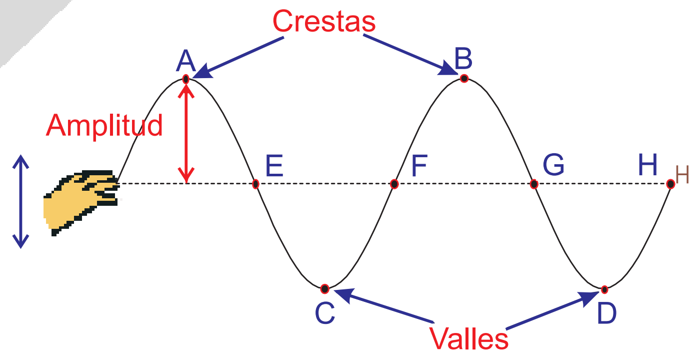

Figura 1. Onda transversal viajando por una soga.

La línea punteada corresponde a la posición de reposo que tenía la soga antes de que moviéramos la mano. Después que introducimos la perturbación, las partículas de la soga comienzan a vibrar hacia arriba y hacia abajo, con un movimiento sinusoidal. Fíjense que las partículas que constituyen el medio se están desplazando con un movimiento armónico simple. Los puntos A y B son las **crestas** o picos de esta onda y corresponden a los máximos desplazamientos en la dirección positiva. Ese desplazamiento máximo es lo que llamamos amplitud de la onda. Los puntos C y D son los **valles** y corresponden al máximo desplazamiento en la dirección negativa. Los puntos como el E, F, G y H cuya posición coincide con la de reposo se llaman **nodos**. Para determinar la longitud de onda tenemos que medir la distancia entre dos puntos equivalentes en dos ciclos consecutivos. Podemos entonces considerar la distancia entre dos crestas adyacentes y determinar la longitud de onda midiendo la distancia entre los puntos A y B (o entre dos valles midiendo la distancia entre los puntos C y D). En las ondas transversales podemos definir un plano de polarización de la onda, que es el plano en el cuál ocurre la perturbación (el plano en el que movemos la mano hacia arriba y hacia abajo en el caso de la soga). Decimos entonces que las ondas transversales están polarizadas en un plano.

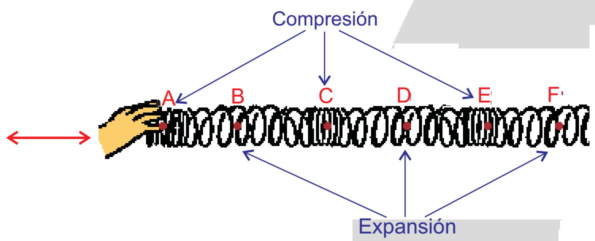

Figura 2. Onda longitudinal viajando por un resorte.

Una onda **longitudinal** es aquella en la cuál las partículas del medio se mueven en una dirección paralela a la dirección en la que la onda se propaga, o sea paralela a la dirección en la que se transporta la energía. Supongamos que tenemos un resorte apoyado sobre una mesa muy lisa (sin rozamiento). Si tomándolo de un extremo hacemos un movimiento horizontal hacia adelante y hacia atrás repitiéndolo en forma regular, generamos una onda longitudinal. El resorte se moverá hacia adelante y hacia atrás en dirección horizontal, comprimiendo y descomprimiendo las espiras que vibrarán longitudinalmente (otra vez con movimiento armónico simple). En la figura 2 mostramos que veríamos si tomamos una foto para congelar el movimiento.

Hay regiones en que las espiras están más juntas (compresión) y otras en las que están más separadas (expansión, enrarecimiento o rarefacción). Una zona de **compresión** en una onda mecánica longitudinal, es una zona del medio que tiene mayor densidad (en este caso hay más espiras de resorte por unidad de longitud). Una zona de **expansión** (o enrarecimiento, o rarefacción) del medio, por el contrario, tiene menor densidad (en este caso hay menos cantidad de espiras por unidad de longitud). En el caso de las ondas sonoras, donde el medio es gaseoso, las variaciones de densidad están asociadas a variaciones de presión del gas. Entonces las zonas de compresión son zonas de alta presión y las zonas de expansión de baja presión. En la figura 2, los puntos A, C y E representan zonas de compresión y los puntos B, D y F zonas de expansión. Una onda longitudinal tiene un patrón alternado de crestas y valles. Una onda longitudinal tiene un patrón alternado de compresiones y rarefacciones. Para determinar la longitud de onda vamos a medir la distancia entre dos ciclos de compresión adyacentes o entre dos ciclos de expansión adyacentes. Midiendo la distancia entre los puntos A y C (o B y D) tenemos la longitud de onda de nuestra onda longitudinal.

Las ondas que viajan por un medio sólido (como una soga o un resorte) pueden ser transversales o longitudinales. Sin embargo las ondas que viajan por un medio fluido, como un gas o un líquido, son siempre longitudinales. Las ondas transversales necesitan de un medio relativamente rígido para poder viajar. Al introducir una perturbación, debido a la fuerte interacción que existe entre las partículas, cada partícula que se desplaza "tira"de sus vecinas y el movimiento se va propagando. En un fluido las partículas solo pueden empujarse entre sí. Esta característica de los líquidos y gases impide que una partícula desplace a su vecina en una dirección perpendicular al transporte de energía y el único movimiento posible es el de una onda longitudinal.

Hay ondas que son longitudinales y transversales al mismo tiempo, las **ondas mixtas**. Esto ocurre por ejemplo con las ondas que viajan por la superficie del agua, como cuando tiramos una piedra en agua calma. Cuando pasa la onda, las partículas describen un movimiento circular en el sentido de las agujas del reloj. Además de subir y bajar (desplazamientos transversales), las partículas presentan pequeños movimientos paralelos y antiparalelos a la dirección de propagación de la onda (desplazamientos longitudinales). Los movimientos transversales son posibles gracias a la ayuda de la tensión superficial de las partículas de la superficie del agua que están en contacto con el aire. El radio de los círculos disminuye a medida que nos internamos en el agua, alejándonos de la superficie (donde ya habíamos visto que no podemos tener una onda transversal).

4. Ecuación de onda

Para describir el movimiento de una perturbación que viaja por un medio a velocidad constante utilizamos la ecuación de onda. Ésta relaciona la velocidad de las partículas del medio con su aceleración. La ecuación de onda para una onda plana que viaja en la dirección $\hat{x}$ a una velocidad v es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

La función $y(x,t)$ se llama **función de onda** e indica la posición de la perturbación en el espacio y en el tiempo. La variable y representa el desplazamiento de la posición de equilibrio de las partículas del medio al pasar la onda. Esta expresión para la ecuación de onda se utiliza tanto para ondas mecánicas como para ondas electromagnéticas.

Volvamos al ejemplo de una onda transversal viajando por una soga en la dirección de las x positivas para un dado t, como se muestra en la figura 3. En la ecuación de onda podemos ver que la aceleración de un elemento de la cuerda $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$ está relacionada con la curvatura del mismo. Si el punto de la soga que estamos considerando está sobre una región cóncava hacia arriba, entonces la $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) > 0$ y el vector aceleración apunta hacia arriba. Si estamos observando una zona cóncava hacia abajo de la soga, entonces $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) < 0$ y el vector aceleración apunta hacia abajo. En los puntos de inflexión, la derivada segunda es nula y la cuerda está en reposo (nodos).

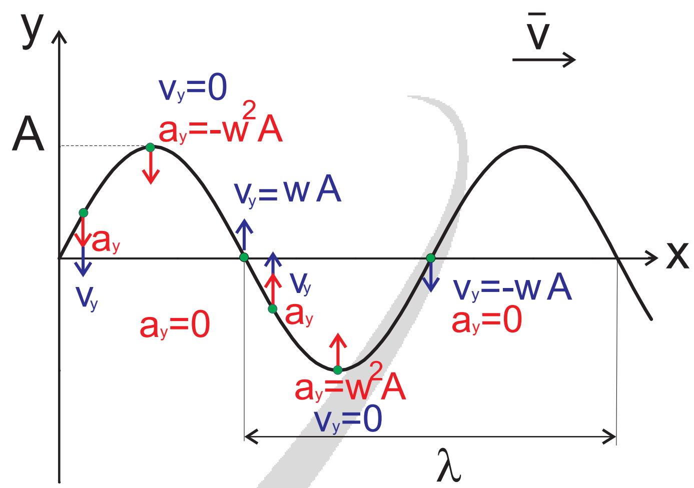

Figura 3. Onda periódica transversal: módulo y dirección de la velocidad y aceleración de la onda en distintos puntos para un dado tiempo.

La solución de la ecuación de onda para una onda periódica transversal sinusoidal que viaja en la dirección $\hat{x}$ es:

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t + \Phi)$$

donde $kx-\omega t+\Phi$ es la fase de la onda y Φ es la constante de fase que vamos a tomar igual a 0 por comodidad. Dos ondas están en fase si ejecutan el mismo movimiento al mismo tiempo. Si la onda viaja en la dirección $-\hat{x}$, se reemplaza el $-$ por un $+$.

De allí podemos sacar la expresión para la velocidad de las partículas del medio y para su aceleración:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

$$a_y(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) = -\omega^2 y$$

Volvemos a ver que el vector aceleración apunta hacia abajo en las regiones de $y > 0$. En la figura 3 se indica hacia donde apuntan la velocidad y la aceleración de las partículas al pasar la onda según la zona de la soga que estemos considerando. En las crestas y los valles la velocidad es nula y la aceleración alcanza sus valores extremos. En los nodos la aceleración es nula y la velocidad alcanza sus valores extremos.

Esta solución particular se puede escribir en varias formas equivalentes utilizando las relaciones entre los parámetros que describen a una onda:

$$y(x,t) = A\,\text{sen}(kx-\omega t) = A\,\text{sen}\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right\} = A\,\text{sen}\left\{2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right)\right\}$$

4.1. Forma general de la ecuación de onda

Hasta ahora estuvimos analizando ondas que se propagaban en una única dirección, o sea ondas unidimensionales. Para representar a la perturbación que viajaba a velocidad v según la dirección del eje x habíamos definido una función de onda que dependía de la posición y del tiempo $y(x,t)$.

A veces necesitamos poder describir una onda que se propaga en más de una dirección. Por ejemplo, si queremos describir el movimiento de la membrana del tímpano al vibrar necesitamos describir una oscilación en dos dimensiones. Para poder describir una onda que se propaga en 3 dimensiones, nuestra función de onda debe depender de x, y, z y del tiempo: $\Psi(x,y,z,t)$. Escribimos entonces la ecuación de onda en 3 dimensiones:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) = v^2\nabla^2\Psi$$

Para una onda que se propaga en una dirección arbitraria en el espacio definimos el **vector de propagación o vector de onda** $\overline{k} = k_x\hat{x}+k_y\hat{y}+k_z\hat{z}$ y el **vector posición** $\overline{r} = x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$. El vector de onda $\overline{k}$ tiene el módulo del número de onda $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ y apunta en la dirección de propagación de la onda. La solución para una onda plana periódica sinusoidal en 3 dimensiones es entonces:

$$\Psi(x,y,z,t) = A\,\text{sen}(\omega t - \overline{k}.\overline{r} + \Phi)$$

5. Ondas en una cuerda ideal

5.1. Derivación de la ecuación de onda

Vamos a ver como obtener una descripción del movimiento de una onda plana transversal que viaja por una soga ideal utilizando la segunda ley de Newton. Por soga ideal entendemos que es tan finita que no consideramos su espesor al hacer las cuentas y tan flexible que copia exactamente la forma de la onda que viaja por ella. Tomemos un elemento de soga cualquiera, de longitud Δx y veamos las fuerzas que actúan sobre éste. Cómo el peso del trocito de soga es muy pequeño lo despreciamos y las únicas fuerzas que actúan son las tensiones aplicadas por el resto de la soga a ambos extremos del elemento que estamos considerando.

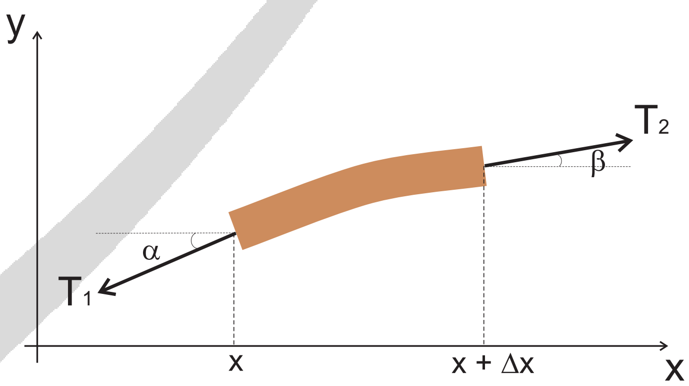

Figura 4. Tensiones que actúan sobre un elemento de soga por la que viaja una onda transversal.

Al plantear las sumatorias de las fuerzas según x y según y nos quedan estas dos ecuaciones:

$$\Sigma F_x = T_2\cos\beta - T_1\cos\alpha = ma_x$$

$$\Sigma F_y = T_2\,\text{sen}\,\beta - T_1\,\text{sen}\,\alpha = ma_y$$

La aceleración a_x va a ser cero para una onda transversal. Esto nos permite definir una tensión horizontal constante T actuando sobre la soga:

$$T_2 \cos\beta = T_1 \cos\alpha = T$$

La única componente no nula de la aceleración es a_y, que es igual a la $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Cómo la densidad lineal de masa es $\mu = m/L$, el elemento de soga tendrá una masa igual a $\mu\Delta x$. Con estas consideraciones, la ecuación proveniente de hacer la sumatoria de fuerza según y queda:

$$T_2 \operatorname{sen}\beta - T_1 \operatorname{sen}\alpha = \mu\Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$$

Si ahora dividimos miembro a miembro esta ecuación por T queda:

$$\frac{T_2 \operatorname{sen}\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \operatorname{sen}\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\mu\Delta x}{T}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$$

Esto es:

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\mu\Delta x}{T}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$$

Para calcular las tangentes de α y β basta con calcular las pendientes del pedacito de soga en ambos extremos:

$$\tan\alpha = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x = f(x)$$

$$\tan\beta = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} = f(x+\Delta x)$$

Reemplazando esto en la ecuación y pasando de término al Δx nos queda la siguiente relación:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\mu}{T}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$$

El elemento de soga que tomamos es muy pequeño, tanto como queramos, o sea que lo que nos interesa en nuestros cálculos es tomar el límite cuando éste tiende a cero. Entonces el miembro de la izquierda de la ecuación queda:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

Igualando al miembro de la derecha nos queda una relación entre derivadas segundas de y:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{\mu}{T}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$$

Esta expresión no es otra cosa que la ecuación de onda, donde la velocidad de la onda está dada por $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

5.2. Ondas viajeras y ondas estacionarias

Las ondas en una soga ideal se pueden clasificar en dos tipos según las condiciones de contorno en las que se encuentra:

1. **onda viajera**, es una perturbación que se propaga libremente por un medio hasta el momento en que sufra algún tipo de interacción (como llegar a una pared o encontrarse con otra onda viajando en dirección contraria). Las ondas transversales y longitudinales que estudiamos son ondas viajeras. La solución de la ecuación de onda tiene la forma:

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt)\right\}$$

2. **onda estacionaria**, cuando está confinada a una región del espacio. Este es el caso de las cuerdas de una guitarra: tienen los dos extremos fijos. La solución en este caso es:

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(\omega_n t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Vamos a sustituir esta ultima expresión directamente en la ecuación de onda para ver que es una solución y sacar alguna información interesante. Primero calculamos ambos miembros de la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = A\frac{n^2\pi^2}{L^2}\operatorname{sen}(\omega_n t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\mu}{T}A\omega_n^2\operatorname{sen}(\omega_n t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para que estas dos expresiones sean iguales se debe cumplir que:

$$\frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{\mu\omega_n^2}{T}$$

Esta igualdad nos indica cuales son las frecuencias permitidas para una onda estacionaria en una cuerda:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{n\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad \nu_n = \frac{nv}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Para $n = 1$ la frecuencia es $\nu_1 = v/2L$. En este caso la longitud de onda λ es $2L$ (recordar que la velocidad de la onda está dada por la relación $v = \lambda\nu$). Tenemos entonces el **modo fundamental** de vibración, que es aquel en el cuál la longitud de onda es el doble de la longitud de la cuerda. Esta es la frecuencia mas baja a la cuál puede vibrar la cuerda y como corresponde al valor $n = 1$ también se conoce como primer armónico. Una cuerda ideal vibrará en su frecuencia fundamental más todos sus armónicos (todos los n posibles). En la figura 5 se muestra la forma de onda para los tres primeros armónicos.

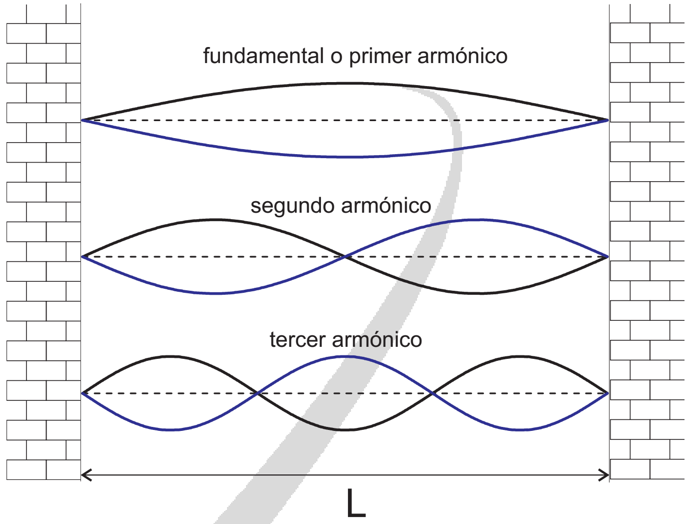

Figura 5. Modos de vibración de una cuerda.

En el caso de ondas estacionarias, los nodos no cambian de posición en el tiempo. En esos puntos las partículas del medio no se desplazan de su posición de equilibrio en ningún momento. Matemáticamente lo pueden ver analizando para que valores de x la función de onda y es nula. Esto ocurre cuando $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$, y es independiente del tiempo. Utilizando la relación que encontramos entre L y ν_n, los puntos que no se desplazan estarán ubicados en las posiciones que cumplan la condición:

$$\frac{n\pi x}{L} = \frac{2\pi x}{\lambda} = m\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m\lambda}{2} \quad \text{con} \;\; m = 0, 1, 2, \ldots$$

Calculamos las posiciones de los nodos distintos de $x = 0$ ubicados en la cuerda para los tres primeros armónicos, como se muestra en la figura 5:

$$\begin{array}{llll} n = 1 \Rightarrow \lambda = 2L & \Rightarrow & \text{nodos en} & x = \frac{\lambda}{2} = L \\ n = 2 \Rightarrow \lambda = L & \Rightarrow & \text{nodos en} & x = \frac{\lambda}{2} = \frac{L}{2}, \quad x = \lambda = L \\ n = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{3} & \Rightarrow & \text{nodos en} & x = \frac{\lambda}{2} = \frac{L}{3}, \quad x = \lambda = \frac{2L}{3}, \quad x = \frac{3\lambda}{2} = L \end{array}$$

Al pulsar las cuerdas de la guitarra cada una de ellas vibra con una frecuencia diferente, según la longitud, la tensión y la masa de la misma.

Vimos que la frecuencia y la velocidad están relacionadas de modo que $\nu \propto v/L$. A su vez, la velocidad está relacionada con la tensión, longitud y masa de la cuerda: $v = \sqrt{\frac{T}{m/L}}$. Entonces la frecuencia ν será proporcional a $\sqrt{\frac{T}{mL}}$. Vemos que para obtener una frecuencia mas baja tenemos que disminuir la tensión, aumentar la masa o la longitud de la cuerda. Por eso las tres primeras cuerdas de la guitarra, que corresponden a las frecuencias mas bajas, están recubiertas de metal para aumentar la masa de las mismas. Si acortamos una cuerda de la guitarra presionando con el dedo en un traste, se logra que una cuerda vibre a una mayor frecuencia. Esto se utiliza para afinar la guitarra, poniendo a vibrar 2 cuerdas a la misma frecuencia. Por comparación auditiva se va aumentando o disminuyendo la tensión de una de ellas hasta lograr que las dos ondas estacionarias generadas tengan la misma frecuencia. Para subir una octava la frecuencia fundamental de una cuerda (esto equivale a multiplicar por 2 la frecuencia de vibración) hay que aumentar 4 veces la tensión de la cuerda.

6. Energía y potencia transmitidas

Continuando con el ejemplo de una onda transversal plana que viaja por una soga, consideremos otra vez un diferencial de soga como el que se muestra en la figura 6. Vamos a suponer que por la soga viaja una onda periódica que se desplaza en la dirección de las x positivas y que su movimiento está dado por $y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$. Para calcular la energía que transporta la onda debemos calcular por un lado la energía cinética debida al movimiento de la soga y por el otro la energía potencial debida a que la soga se estiró. Estamos suponiendo que no tenemos disipación de energía (por ejemplo por calentamiento).

La energía cinética de un elemento de soga de masa μdx que se mueve a una velocidad $\frac{\partial y}{\partial t}$ vendrá dada por:

$$dK = \frac{1}{2}(\mu dx)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}(\mu dx)(A\omega)^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Al pasar la onda, la longitud del diferencial de soga cambia de dx a dl. La energía potencial del elemento de soga vendrá dada por el trabajo que hace la tensión de la soga para estirarla:

$$dU = T(dl - dx)$$

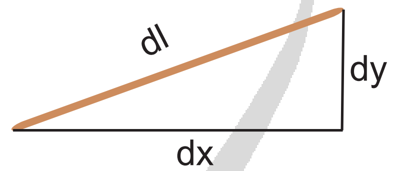

Figura 6. Elemento de soga estirado hasta una longitud dl.

En la figura 6 se ve que podemos expresar al dl como $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, y la energía potencial queda:

$$dU = T dx \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1\right]$$

Ahora, la cantidad que se estira la soga es muy pequeña, por lo cual la pendiente de la soga $\frac{\partial y}{\partial x}$ también lo será. Podemos entonces calcular el valor de la raíz cuadrada haciendo un desarrollo de Taylor alrededor de 0. Tenemos la función $f(z) = \sqrt{1 + z^2}$ con $z = \frac{\partial y}{\partial x} \simeq 0$. Su desarrollo de Taylor alrededor de 0 es:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + f"(0)\frac{z^2}{2} + \ldots$$

Quedándonos con los términos hasta segundo orden tenemos:

$$\sqrt{1 + z^2} = 1 + \frac{1}{2}z^2$$

O sea:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Reemplazamos esto en la expresión de la energía potencial del elemento de soga:

$$dU = \frac{1}{2} T dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}(T dx)(kA)^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Habíamos visto que la velocidad de onda en una cuerda es $v^2 = T/\mu$ y que el número de onda es $k = \omega/v$. Si reemplazamos estas relaciones en la expresión de la energía potencial, encontramos que $dK = dU$. Entonces la energía total que transporta el elemento de soga será:

$$dE = dK + dU = 2dK = 2dU = (\mu dx)(A\omega)^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

La **potencia** de una onda será la energía transmitida por unidad de tiempo $P = dE/dt$. Si tenemos en cuenta que la onda viaja una distancia dx en un tiempo dt a una velocidad v, vemos que $dx = vdt$ y la potencia será:

$$P = \mu v A^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Esta expresión nos da el valor de la potencia en función de la posición y del tiempo. En general se utiliza un promedio de muchos ciclos, la potencia promedio $\overline{P}$. La media del $\cos^2$ es $1/2$ y tenemos que:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 v$$

.

Vemos que la cantidad de energía que transporta una onda está relacionada con el cuadrado de la amplitud y de la frecuencia de la misma.

7. Un consejo...

No tomen este apunte como único material de estudio de ondas. Hay temas que no están aquí, como superposición de ondas, que están muy bien explicados en los textos de las referencias. La idea es que estudien utilizando cualquier texto de la bibliografía recomendada (¡o el que tengan a mano!) y usen el apunte como ayuda para entender los temas y ver el nivel requerido para el examen.

Referencias

[1] Física Universitaria Volumen 1, Sears, Zemansky, Young y Freedman (2004) Addison Wesley.
[2] Física Volumen 1, Resnick, halliday y Krane (2005) CECSA.
[3] Física Universitaria Volumen 1, Ronald Reese (2002) Thomson.